SENAI

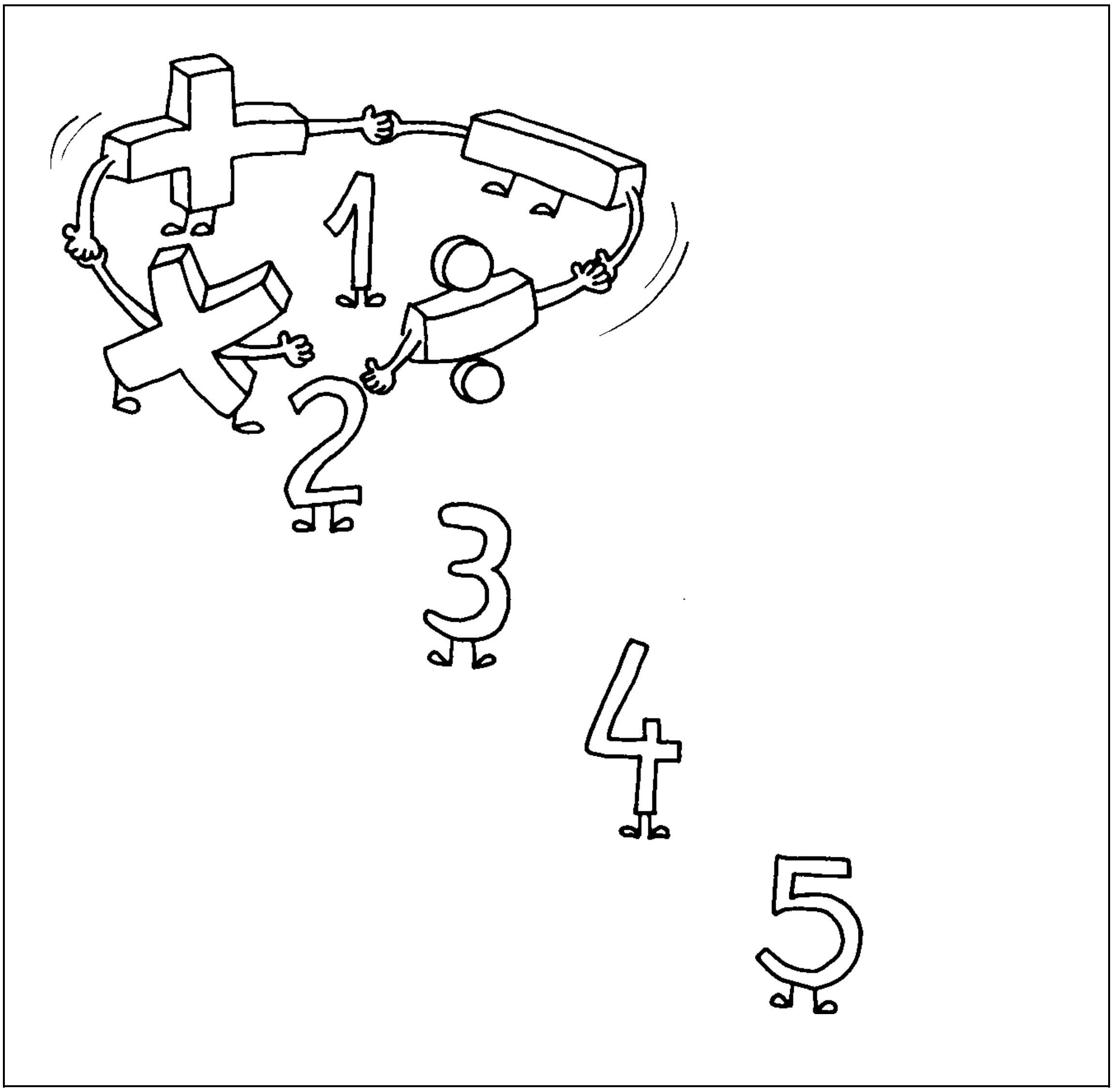
Espírito Santo

COMPANHIA
SIDERÚRGICA DE TUBARÃO

CPM - Programa de Certificação de Pessoal de Manutenção

Mecânica

Matemática Elementar



SENAI
Espírito Santo

COMPANHIA
SIDERÚRGICA DE TUBARÃO

Matemática Elementar - Mecânica

Trabalho realizado em parceria SENAI / CST (Companhia Siderúrgica de Tubarão)

Coordenação Geral	Luís Cláudio Magnago Andrade (SENAI) Marcos Drews Morgado Horta (CST)
Supervisão	Alberto Farias Gavini Filho (SENAI) Rosalvo Marcos Trazzi (CST)
Elaboração	Evandro Armini de Pauli (SENAI) Fernando Saulo Uliana (SENAI)
Aprovação	José Geraldo de Carvalho (CST) José Ramon Martinez Pontes (CST) Tarcilio Deorce da Rocha (CST) Wenceslau de Oliveira (CST)
Editoração	Ricardo José da Silva (SENAI)

SENAI - Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
DAE - Divisão de Assistência às Empresas
Departamento Regional do Espírito Santo
Av. Nossa Senhora da Penha, 2053
Bairro Santa Luíza - Vitória - ES.
CEP 29045-401 - Caixa Postal 683
Telefone: (027) 325-0255
Telefax: (027) 227-9017

CST - Companhia Siderúrgica de Tubarão
AHD - Divisão de Desenvolvimento de Recursos Humanos
AV. Brigadeiro Eduardo Gomes, s/n, Jardim Limoeiro - Serra - ES.
CEP 29160-972
Telefone: (027) 348-1322
Telefax: (027) 348-1077

Sumário

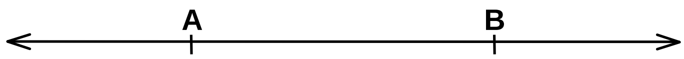
Medidas de Comprimento

Conceito de Medida

Medir uma grandeza é compara-la com outra da mesma espécie tomada como unidade.

<u>EXEMPLO</u>

Consideremos dois pontos quaisquer de uma reta **r**, os quais representaremos pelas letras **A** e **B**.

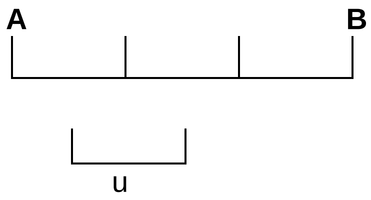


A parte de reta compreendida entre os pontos **A** e **B** é chamada segmento de reta.

Para medir o segmento de reta $\overline{\mathbf{AB}}$, escolhemos um segmento unitário **u** que será a unidade de medida.

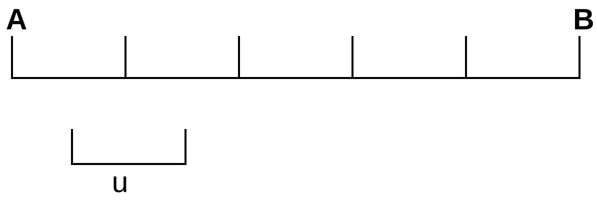
<u>EXEMPLO</u>

1º



$\overline{\mathbf{AB}} = 3u$

1º



$\overline{\mathbf{AB}} = 5u$

Qualquer segmento pode ser escolhido para unidade de comprimento. Porém se cada pessoa pudesse escolher livremente uma unidade de comprimento para medir um segmento $\overline{AB}$, este apresentaria diferentes medidas, dependendo da unidade usada.

Assim, existe a necessidade de se escolher uma unidade padrão de comprimento, isto é, uma unidade de comprimento que seja conhecida e aceita por todas as pessoas.

Medidas de Comprimento

A unidade padrão de comprimento é o ***metro***.

O metro é o comprimento assinalado sobre uma barra metálica depositada no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na cidade de Sévres (França).

O metro com seus múltiplos forma o Sistema Métrico Decimal que é apresentado no seguinte quadro:

	MÚLTIPLOS				***SUBMÚLTIPLOS***		
Unidade	Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
Símbolo	KM	hm	dam	m	dm	cm	mm
Valor	1.000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01	0,001 m

Leitura de Comprimentos

Cada unidade de comprimento é igual a 10 vezes a unidade imediatamente inferior:

1Km = 10 hm   1hm = 10 dam   1 dam = 10 m

1m = 10 dm   1dm = 10 cm   1 cm = 10mm

Em consequência, cada unidade de comprimento é igual a 0,1 da unidade imediatamente superior:

1hm = 0,1 km   1dam = 0,1 hm   1m = 0,1 dam

1dm = 0,1 m   1 cm = 0,1 dm   1mm = 0,1 cm

A leitura e a escrita de um número que exprime uma medida de comprimento (número seguido do nome da unidade) é feita de modo idêntico aos números decimais.

Veja como você deve ler alguns comprimentos:

0,1m → 1 décimo de metro ou → 1 decímetro

0,25m → vinte e cinco centésimos de metro ou → vinte e cinco centímetros

6,37m → seis inteiros e trinta e sete centésimos de metro ou → 63,7 decímetros

Mudanças de Unidade

Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior, devemos fazer uma multiplicação por 10, ou seja, devemos deslocar a vírgula um algarismo para a direita.

<u>EXEMPLOS</u>

3,72 dam = (3,72 x 10)m = 37,2 m

5,89 dam = (5,89 x 10)m = 58,9 m

Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, devemos fazer uma divisão por 10, ou seja, devemos deslocar a vírgula de um algarismo para a esquerda.

<u>EXEMPLOS</u>

389,2 cm = (389,2 : 10) dm = 38,92 dm

8,75 m = (8,75 :10) dam = 0,875 dam

Para passar de uma unidade para outra qualquer, basta aplicar sucessivamente uma das regras anteriores.

<u>EXEMPLOS</u>

a) <u>Km</u> para <u>m</u>

3,584 Km = 35,84 hm = 358,4 dam = 3.584 m

b) dm para hm

87,5 dm = 8,75 m = 0,875 dam = 0,0875 hm

Exercícios - Medidas de Comprimento

1) Escreva a medida mais adequada quando você quer medir:

   a) O comprimento da sala de aula;
   b) A distância entre Vitória e Rio de Janeiro;
   c) A largura de um livro;
   d) A folga de virabrequim.

2) Escreva as medidas:

   a) 8 hectômetros e 9 decâmetros;
   b) 3 metros e 2 milímetros;
   c) 27 metros e 5 milímetros;
   d) 1 metro e 17 centímetros;
   e) 15 decímetros e 1 milímetro.

3) Transforme cada medida apresentada para a unidade indicada:

   a) 527 m = ... cm
   b) 0,783 m = ... mm
   c) 34,5 dam = ... cm
   d) 0,8 m = ... mm
   e) 22,03 m = ... dm

4) Reduza para a unidade indicada:

   a) 5 m = ... dm
   b) 6 m = ... cm
   c) 7 m = ... mm
   d) 9 dm = ... cm
   e) 12 dm = ... mm
   f) 18 cm = ... mm
   g) 0,872 m = ... mm

5) Como se lêem as medidas:

a) 38,65 m = ...
b) 1,50 m = ...
c) 13,08 Km = ...
d) 2,37 hm = ...
e) 9,728 m = ...

6) Marque as afirmativas com **V** ou **F**:

a) (   ) A unidade 100 vezes menor que o metro é o centímetro.
b) (   ) O metro é a medida usada para medir comprimento.
c) (   ) A abreviatura de decâmetro é dm.
d) (   ) 1 m = 10 cm.
e) (   ) 1000 mm corresponde a 1 metro.
f) (   ) As medidas de comprimento variam de 10 em 10.

7) Com base na tabela, represente:

	Km	hm	dam	m	dm	cm	mm
a)							
b)							
c)							
d)							
e)							

a) oito hectômetros e cinco metros.
b) doze decâmetros e sete centímetros.
c) cinquenta e um metros e nove milímetros.
d) vinte e cinco hectômetros e dezenove decímetros.
e) dois metros e cinco milímetros.

8) Descubra as medidas representadas no quadro e a seguir, escreva por extenso:

	Km	hm	dam	m	dm	cm	mm
a)		1	0,	0	3		
b)				4,	5		
c)					2,	1	6
d)				3,	0	0	7
e)			1	6,	0	5	

a) ....
b) ....
c) ....
d) ....
e) ....

9) Resolva os problemas com toda a atenção:

a) Júlio tem 1,72 m de altura e Paulo tem 1,58 m. Qual a diferença da altura dos dois meninos?

b) Alice quer colocar o rodapé na sala. A sala tem forma retangular com medidas iguais 3,5 m e 4,2 m. Quantos metros de rodapé serão colocados nesta sala?

c) Um vendedor tinha uma peça de tecido com 6,5 m. Ontem, vendeu 2,4 m deste tecido a uma freguesa e hoje vendeu mais 1,3 m da mesma fazenda. Quantos metros sobraram?

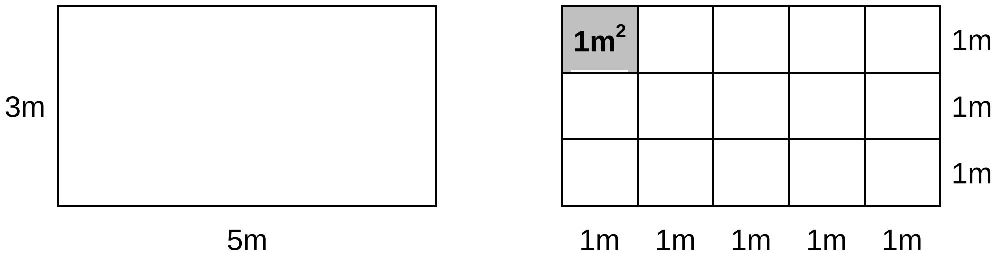
d) Uma barra de ferro com 8 m será repartida em 32 pedaços do mesmo tamanho. Quanto medirá cada padeço?

e) Um lote de forma quadrada será cercado com 3 voltas de arame. Quantos metros de arame serão gastos, se o lado do lote tem 22,5 m?

Medidas de Superfície

A medida de uma superfície chama-se ***área***. O ***metro quadrado*** (m^2) é a unidade fundamental das medidas de superfície.

Dividimos o retângulo à esquerda em quadrados de 1 metro de lado.



Então o retângulo tem $15m^2$ de área.

Conclusão:

Podemos encontrar a área do retângulo multiplicando a medida da base pela medida da altura.

Múltiplos e Submúltiplos do m^2

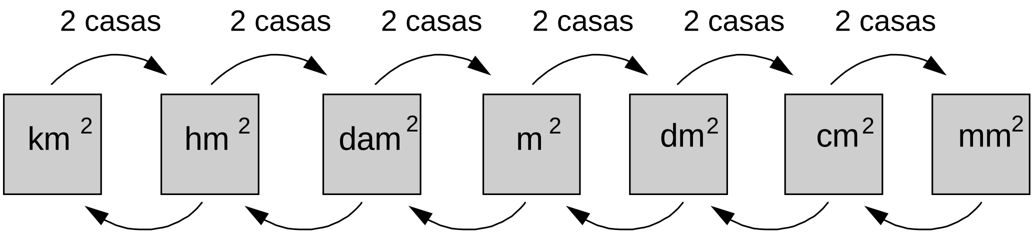
Para medir superfícies, além do metro quadrado, podemos usar ainda os:

- Múltiplos
  - $1000000\ m^2 = 1\ km^2$ (quilômetro quadrado)
  - $10000\ m^2 = 1\ hm^2$ (hectômetro quadrado)
  - $100\ m^2 = 1\ dam^2$ (decâmetro quadrado)

- Submúltiplos
  - $1\ m^2 = 100\ dm^2$ (decímetro quadrado)
  - $1\ m^2 = 10000\ cm^2$ (centímetro quadrado)
  - $1\ m^2 = 1000000\ mm^2$ (milímetro quadrado)

Mudanças de Unidade

Cada unidade de superfície é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior.



A mudança de unidade se faz com o deslocamento da vírgula a ***direita*** ou para a ***esquerda***.

<u>EXEMPLOS:</u>

a) Transformar 73,58 dam^2 em metros quadrado:

73,58 dam^2 = (73,58 x 100) m^2 = 7358 m^2

Na prática, deslocamos a vírgula duas casas para a direita.

b) Transformar 0,54623 hm^2 em metros quadrados:

0,54623 hm^2 = (0,54623 x 10000) m^2 = 5462,3 m^2

Na prática, deslocamos a vírgula quatro casas para a direita.

c) Transformar 18,57 dm^2 em metros quadrados:

18,57 dm^2 = (18,57 : 100) m^2 = 0,1857 m^2

Na prática, deslocamos a vírgula duas casas para a esquerda.

Exercícios - Medidas de Superfície

1) Transforme em m^2:

a) 7 km^2
b) 8 dam^2
c) 6,41 km^2
d) 5,3 hm^2
e) 87,20 dm^2
f) 44,93 cm^2
g) 0,0095 hm^2
h) 524,16 cm^2

2) Faça a conversão de:

a) 15 m^2 em dm^2
b) 30 hm^2 em km^2
c) 0,83 cm^2 em mm^2
d) 3200 mm^2 em cm^2
e) 0,07 dm^2 em cm^2
f) 581,4 m^2 em dm^2
g) 739 dam^2 em km^2
h) 0,65 m^2 em hm^2

Tabela para facilitar os exercícios:

MÚLTIPLOS				SUBMÚLTIPLOS		
Km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**

Números Inteiros Relativos

No estudo das operações com números naturais, você aprendeu que a subtração não pode ser efetuada quando o minuendo é menor do que o subtraendo.

5 - 9 = ?   1 - 2 = ?   3 - 8 = ?

Para que a subtração seja sempre possível foi criado o conjunto dos números inteiros negativos.

- 1, - 2, - 3, - 4, ...

Esses números negativos, reunidos com zero e com os números inteiros positivos, formam o *conjunto dos números inteiros relativos*, cujo conjunto é representado por ***Z***.

Z = {... - 3, - 2, - 1,   0,   + 1, + 2, + 3, ...}

a) Conjunto dos números inteiros não negativos.

   Z + = { 0, + 1, + 2, + 3, ...}

b) Conjunto dos números inteiros negativos.

   Z - = { 0, - 1, - 2, - 3, ...}

   O número *zero* (0) não é negativo nem positivo

Números Opostos ou Simétricos

Observe:

O oposto de +1 é -1

O oposto de +2 é -2

O oposto de +3 é -3

O oposto de +4 é -4

... -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 ...

RETA NUMERADA

Na reta numerada, os números opostos estão a uma mesma distância do zero.

Observação: O oposto de **zero** é o próprio **zero**.

Valor Absoluto

Valor absoluto de um número inteiro relativo é o número natural que o representa, sem o sinal.

<u>*EXEMPLOS*</u>: *Indicação*:

O valor absoluto de + 5 é 5 — $|+5| = 5$

O valor absoluto de - 5 é 5 — $|-5| = 5$

O valor absoluto de - 8 é 8 — $|-8| = 8$

O valor absoluto de **zero** é **zero**

Verifique:

1) -3 está à esquerda de +1 — $-3 < +1$

Então, -3 é menor que +1

2) +2 está à direita de -3 — $+2 > -3$

Então + 2 é maior que -3

<u>OUTROS EXEMPLOS</u>:

a) $-2 < +2$ b) $0 > -4$ c) $-1 > -3$

Operações com Números Inteiros Relativos

adição

1) Adição de números positivos

Observe os exemplos:

a) $(+2) + (+5) = +7$
b) $(+1) + (+4) = +5$
c) $(+6) + (+3) = +9$

Verificando os resultados anteriores, podemos concluir que:
A soma de dois números positivos é um número positivo.

2) Adição de números negativos

Observe os exemplos:

a) (-2) + (-3) = -5

b) (-1) + (-1) = -2

c) (-7) + (-2) = -9

Verificando os resultados acima, podemos concluir que:
A soma de dois números negativos é um número negativo.

3) Adição de números com sinais diferentes

Observe os exemplos:

a) (+6) + (-1) = +5

b) (+2) + (-5) = -3

c) (-10) + (+3) = -7

Observe que o resultado da adição tem o mesmo sinal que o número de maior valor absoluto.

Conclusão:

A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se os valores absolutos dando-se o sinal do número que tiver maior valor absoluto.

Subtração

A operação de subtração é uma operação inversa da adição.

EXEMPLOS:

a) (+8) - (+4) = (+8) + (-4) = +4

b) (-6) - (+9) = (-6) + (-9) = -15

c) (+5) - (-2) = (+5) + (+2) = +7

Conclusão:

Para subtrairmos dois números relativos, basta que adicionemos ao primeiro o simétrico do segundo.

Expressões com Números Inteiros Relativos

Lembre-se que os sinais de associação são eliminados, obedecendo à seguinte ordem:

1º - *Parênteses* **( )** 2º - *Colchetes* **[ ]** 3º - *Chaves* **{ }**

EXEMPLOS

1) +10 - (-4 + 6)
   +10 - (+2)
   +10 - 2 = +8

2) (+7 -1) + (-3 +1 -5)
   (+6) + (-7)
   +6 - 7 = -1

3) 10 + [-3 +1 - (-2 +6)]
   10 + [-3 +1 - (+4)]
   10 + [-3 +1 -4]
   10 + [-6]
   10 -6 = +4

Multiplicação

Consideremos os seguintes casos:

1) Multiplicação de dois números positivos:

   a) (+5) . (+2) = +10
   b) (+3) . (+7) = +21

(+) . (+) = +
(-) . (-) = +
(+) . (-) = -
(-) . (+) = -

Conclusão:

O produto de dois números positivos é um número positivo.

2) Multiplicação de dois números negativos:

   a) (-3) . (-5) = +15
   b) (-8) . (-2) = +16
   c) (-7) . (-1) = +7

Conclusão:

O produto de dois números negativos é um número positivo.

Divisão (+) ÷ (+) = +

(-) ÷ (-) = +

(+) ÷ (-) = -

(-) ÷ (+) = -

Observações:

1) *A divisão nem sempre é possível em Z*

(+9) ÷ (-2) = ($\notin$ *Z*)

$\notin$ $\rightarrow$ Lê-se: não pertence.

1) *O zero nunca pode ser divisor*
(+5) ÷ 0 é impossível
(-2) ÷ 0 é impossível

Exercícios - Números Inteiros Relativos

Calcule:

a) (+5) + (-3) - (+2) + (-1) =

b) 10 + { 5 -(-3 +1) } =

c) 23 - { 1 + [5 - (+3 -2 +1)] } =

d) (+5 -3) ÷ (-1 +3) =

e) (-16 ÷ -8) . (+3 . -4) =

Equação do 1º Grau

Definição:

São as equações da forma Ax $\pm$B = 0, onde A e B são números positivos, negativos, inteiros ou fracionários.

A e B   constantes

X   variável

OBS.: O grau da equação é dado pelo expoente da variável X. Como não há expoente de X, evidentemente ele é igual a 1.

Resolução de uma Equação do 1º Grau

Seja a equação:

$$2x - 5 + 3x = 2x + 15 - x$$

1º membro   2º membro

Solução:

Separarmos no 1º membro todos os termos que contém x e no 2º membro os demais.

Devemos considerar que um termo, ao trocar de membro, troca também de operação.

Assim:

$$2x + 3x - 2x + x = 15 + 5$$

$$4x = 20$$

$$x = \frac{20}{4}$$

$$x = 5$$

Resolva:

$$\frac{x+3}{2} = x - \frac{5}{3}$$

Solução:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{x}{1} - \frac{5}{3}$$

O M.M.C. entre 2 e 3 é 6

Pois 2 e 3 são primos entre si

Lembra-se do que vem a ser números primos?

$$\frac{3x+9}{\cancel{6}} = \frac{6x-10}{\cancel{6}}$$

$$3x + 9 = 6x - 10$$

$$3x - 6x = -10 - 9$$

$$-3x = -19 \ (-1)$$

$$3x = 19$$

$$x = \frac{19}{3}$$

Quando o termo que contém x der negativo, devemos transforma-lo em positivo, multiplicando os dois membros da equação por -1.

Exercícios - Equações do 1º Grau

Resolva:

a) $3x - 5x = -18$

b) $\frac{3x-2}{3} = \frac{3x}{2} - 1$

c) $\frac{4(x-1)}{3} = \frac{2x}{3} - 1$

d) Um número somado com a sua terça parte é igual a 24. Calcule esse número.

e) Quando adicionamos 56 a um certo número **x**, obtemos como resultado o número 120. Qual é o valor de **x** ?

f) Um certo número, aumentado de 43, é igual a 109. Qual é esse número?

g) Um certo número, dividido por 23 dá resultado 8. Calcule esse número.

h) Um certo número aumentado do triplo desse mesmo número é igual a 104. Qual é esse número ?

i) Pense em um número: a ele acrescente 12 e obtenha resultado igual a três vezes o número pensado. Qual o número que você pensou?

Sistema de Equações do 1º Grau

Observe a equação:

$x - 2 = 0$

É fácil calcular o valor de x.

Resolvendo a equação concluímos que $x = 2$

A equação $x - 2 = 0$, só contém uma incógnita x. Logo foi fácil calcular o seu valor.

Seja agora a equação:

$x + y = 10$

Será possível calcular o valor de x?

Veja:

Se $x = 2 \rightarrow y = 8$ portanto para cada valor
$x = 3 \rightarrow y = 7$ atribuído a x, teremos um
$x = 4 \rightarrow y = 6$ valor para y.

Quando resolvemos uma equação só podemos encontrar um valor para a incógnita. Logo, a equação acima não tem solução.

Para resolvermos a equação $x + y = 10$, necessário se faz que tenhamos uma outra equação, assim:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

O que temos agora é um sistema de duas equações a duas incógnitas.

Vamos resolvê-lo?

a) Processo de adição:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x + \cancel{y} = 10 \\ \underline{x - \cancel{y} = 2} \\ 2x = 12 \end{array} \therefore x = \frac{12}{2} \therefore x = 6$$

Como $x + y = 10$

$6 + y = 10$

$y = 10 - 6$

$y = 4$

b) Processo da substituição:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$x + y = 10 \quad \therefore \quad x = 10 - y$

mas $x - y = 2$

$10 - y - y = 2$

$- 2y = 2 - 10$

$- 2y = -8 \ (-1)$

$2y = 8 \quad \therefore y = \frac{8}{2} \therefore y = 4$

Como $\quad x + y = 10$

$x + 4 = 10 \quad \therefore \quad x = 10 - 4 \quad \therefore \quad x = 6$

c) Processo da comparação:

$$\begin{cases} x + y = 10 (1) \\ x - y = 2 (2) \end{cases}$$

$x + y = 10 \quad \therefore \quad x = 10 - y \ (1)$

$x - y = 2 \quad \therefore \quad x = 2 + y \ (2)$

Igualando (1) e (2)

$2 + y = 10 - y \qquad y + y = 10 - 2$

$2y = 8$

$y = \frac{8}{2}$

$y = 4$

mas:

$x = 10 - y$

$x = 10 - 4$

$x = 6$

Exercícios - Sistema de Equações do 1º Grau

Resolva:

1) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 2y = 25 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} = 8 \\ x + y = 13 \end{cases}$

4) A soma de dois números é igual a 21. Calcule esses números sabendo que um é o dobro do outro.

5) Num quintal existem galinhas e coelhos num total de 8 cabeças e 26 pés. Calcule o número de galinhas e coelhos.

6) A divisão entre dois números é igual 3. Calcule esses números sabendo que a soma entre eles é igual a 8.

Proporcionalidade

Razão

Na linguagem do dia a dia, costuma-se usar o termo razão com o mesmo significado da matemática, ou seja, da divisão indicada de dois números.

Assim, tem-se, por exemplo:

a) A quantidade de litros de álcool adicionado à gasolina está na razão de 1 para 4 ou (1/4). Isso quer dizer que adiciona-se 1 litro de álcool a cada 4 litros de gasolina.

b) Em cada 10 carros de um estacionamento, 6 são de marca X ou 10/6

A partir da análise desses 2 tipos de situações, apresentamos a seguinte definição:

Razão entre dois números é o quociente do primeiro pelo segundo.

Representa-se uma razão entre dois números a e b ($b \neq 0$) por a/b ou a : b (lê-se: "a está para b").

Exemplos:

a) A razão entre os números 3 e 5 é 3/5 ou 3 : 5 (lê-se: "3 está para 5").

b) A razão entre os números 1 e 10 é 1 : 10 (lê-se: "1 está para 10").

c) A razão entre os números 7 e 100 é 7/100 ou 7 : 100 (lê-se: "7 está para 100").

Os termos da RAZÃO são:

$$\frac{12}{2} \begin{array}{l} \rightarrow \text{antecedente} \\ \rightarrow \text{consequente} \end{array} \quad \text{ou} \quad \underset{\text{antecedente}}{\underset{\downarrow}{12}} \; : \; \underset{\text{consequente}}{\underset{\downarrow}{12}}$$

Atenção:

- O consequente (o divisor) deve ser sempre diferente de zero.
- Para determinar o valor de uma razão, basta dividir o antecedente pelo consequente.

Inversa de uma razão

A inversa de uma razão é determinada trocando-se a posição dos termos da razão considerada.

Exemplo: a inversa da razão $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$

Logo, duas razões são inversas, quando o antecedente de uma é igual ao consequente da outra.

Cálculo de uma razão

a) O valor da razão é um número inteiro.

Exemplo:

$3 : 1{,}5 = 2$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 1{,}5 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

b) O valor da razão é uma fração.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}^{2}}{3} = \frac{2}{3}$$

c) O valor da razão é um número decimal.

Exemplo:

$16 : 5 = 3{,}2$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 5 \\ \hline 10 & 3{,}2 \\ 0 & \end{array}$$

d) Para determinar a razão de duas medidas diferentes, é necessário fazer a conversão para uma mesma unidade. No caso, reduziremos a cm:

Exemplo:

$$\frac{2m}{25cm} = \frac{200cm}{25cm} = 8$$

Proporção

Chama-se proporção à igualdade entre duas razões.

De um modo genérico, representa-se uma proporção por uma das formas:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a : b :: c : d$$

Lê-se "a está para b, assim como c está para d".

$(b \neq 0 \quad e \quad d \neq 0)$

Exemplos:

a) As razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$ formam a proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

b) As razões 2 : 3 e 6 : 9 formam a proporção 2 : 3 :: 6 : 9

Observação: Uma proporção representa uma equivalência entre duas frações.

Os números que se escrevem numa proporção são denominados *termos*, os quais recebem nomes especiais: o primeiro e o último termo recebem o nome de *extremos* e os outros dois recebem o nome de *meios*

Exemplo:

extremo ↓ $\frac{9}{12}$ ↑ meio

meio ↓ $\frac{6}{8}$ ↑ extremo

meios

9 : 12 = 6 : 8

↖ extremos ↗

Propriedade fundamental das proporções

Observe a proporção $\frac{9}{12} = \frac{6}{8}$ e examine o que ocorre com os produtos dos termos do mesmo nome.

produto dos meios = 6 x 12 → 72

produto dos extremos = 9 x 8 → 72

Com isso, podemos concluir que:

O produto dos *meios* é igual ao produto dos *extremos*.

Se numa proporção, três termos forem conhecidos e um desconhecido pode-se determina-lo aplicando a propriedade fundamental das proporções.

Exemplos:

na proporção $\frac{a}{2} = \frac{3}{6}$, determinar o valor de <u>a</u>.

a) $\frac{a}{2} = \frac{3}{6}$, tem-se:

$$\begin{aligned} 6.a &= 2.3 \\ 6a &= 6 \\ a &= \frac{6}{6} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

b) Determinar o valor de x na proporção $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$

$\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$, tem-se:

$$\begin{aligned} 2.9 &= 3.x & \qquad 3.x &= 2.9 \\ 18 &= 3x & 3x &= 18 \\ \frac{18}{3} &= x & x &= \frac{18}{3} \\ 6 &= x & x &= 6 \end{aligned}$$

Importante: Nas proporções, costuma-se guardar o lugar do termo desconhecido pelas letras a, x, y, z ou qualquer outro símbolo.

Se forem desconhecidos os dois meios ou os dois extremos caso sejam iguais, deverá multiplicar os termos conhecidos e extrair a raiz quadrada do produto obtido.

Exemplo:

Calcular o valor de y na proporção $\frac{9}{y} = \frac{y}{4}$

$y \cdot y = 9 \cdot 4 \therefore y^2 = 36 \therefore y = \sqrt{36} \therefore y = 6$

Grandezas proporcionais

Na matemática, entende-se por *GRANDEZA* tudo que é suscetível de aumento ou diminuição. Duas ou mais grandezas podem ser diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais

Suponhamos que um parafuso custe R$ 10,00 e observamos que, aumentando-se a quantidade de parafusos, aumentará o custo da quantidade, ou seja:

1 parafuso custa	R$ 10,00
2 parafusos custam	R$ 20,00
3 parafusos custam	R$ 30,00

Diz-se que essas grandezas "quantidade de um produto" e "custo" são diretamente proporcionais porque ao dobro de uma corresponde o dobro da outra, ao triplo de uma, corresponde o triplo da outra e assim sucessivamente.

Desse modo afirma-se que:

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando-se uma delas, a outra aumenta na mesma proporção.

Grandezas inversamente proporcionais

Suponhamos que a distância entre duas cidades é de 240 Km e que um automóvel faz este percurso em 4 horas, a uma velocidade de 60 Km por hora (60 Km/h). Observemos que, aumentando-se a velocidade, diminuirá o tempo gasto no percurso, ou diminuindo a velocidade, aumentará o tempo.

Exemplo:

30 Km/h	gastará	8 h
40 Km/h	gastará	6 h
60 Km/h	gastará	4 h

Pode-se observar que essas grandezas "velocidade" e "tempo de percurso" são inversamente proporcionais porque, quando a velocidade duplica, o tempo se reduz à metade e assim por diante.

Desse modo afirma-se que:

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando-se uma delas, a outra diminui na mesma proporção.

Para formar a proporção correspondente, deve-se considerar o inverso da razão relativa às grandezas inversamente proporcionais.

Exemplo:

VELOCIDADE	TEMPO	RAZÕES	PROPORÇÃO CORRESPONDENTE
a) 30 Km/h 60 Km/h	8 h 4 h	$\frac{30}{60}$ e $\frac{8}{4}$	$\frac{30}{60} = \frac{1}{\frac{8}{4}}$ ou $\frac{30}{60} = \frac{4}{8}$
b) 40 Km/h 60 Km/h	6 h 4 h	$\frac{40}{60}$ e $\frac{6}{4}$	$\frac{40}{60} = \frac{1}{\frac{6}{4}}$ ou $\frac{40}{60} = \frac{4}{6}$

Exercícios - Proporcionalidade

1) Escreva a razão entre cada um dos pares de números seguintes:

a) 3 e 5
b) 7 e 4
c) 1 e 8
d) 2 e 2
e) 6 e 9

2) Escreva a razão inversa de cada uma das razões seguintes:

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{7}{10}$
d) 4 : 7
e) 9 : 5

3) Identifique quais são os extremos e quais são os meios nas proporções:

a) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

b) 5 : 3 = 15 : 9

4) Determine a razão entre as medidas:

a) 5 cm e 25 cm

b) 6 cm e 6 m

c) 1 dm e 0,4 m

d) $\frac{3''}{4}$ e $\frac{5''}{8}$

e) 2 mm e 5 cm

5) Uma chapa retangular tem de comprimento 1,20 m e de largura 80 cm. Calcular:

a) A razão entre a largura e o comprimento.

b) A razão entre o comprimento e a largura.

6) Determine o valor das razões entre:

a) 0,35 e 0,7

b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$

7) Coloque o nome dos termos da razão:

$\frac{5}{9}$ 5 →................................ 9 →................................ ou 5 : 9 5 →.......................... 9 →..........................

8) Coloque o nome dos termos da proporção:

....	←	4	=	8 →	....
....	←	3		6 →	....

9) Complete:

a) A igualdade entre duas razões é chamada ....
....

b) Numa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos ....

c) Em toda proporção, a diferença entre os antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para seu ....
....

10) Determine o valor de x em cada uma das proporções seguinte:

a) $\frac{x}{2} = \frac{8}{4}$

b) $\frac{6}{x} = \frac{12}{8}$

c) $\frac{5}{7} = \frac{x}{14}$

d) $\frac{8}{3} = \frac{8}{x}$

e) $\frac{x}{5} = \frac{2}{10}$

Regra de Três

Uma *regra de três* é uma regra prática que permite resolver problemas através de proporções, envolvendo duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais. Uma regra de três é comumente classificada em simples ou composta.

Regra de Três Simples

Uma regra de três é simples quando envolve apenas duas grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Para resolver uma regra de três simples, segue-se a seguinte orientação:

- escrever, numa mesma linha, as grandezas de espécies diferentes que se correspondem;
- escrever, numa mesma coluna, as grandezas de mesma espécie;
- determinar quais são as grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais;
- formar a proporção correspondente;
- resolver a equação obtida.

Observação: Ao formar a proporção, deve-se considerar o inverso da razão correspondente às grandezas inversamente proporcionais.

Exemplos:

a) Se três limas custam R$ 144,00, quanto se pagará por 7 limas iguais às primeiras?

Para resolver o problema, procede-se assim:

1º) Organizam-se as sucessões com elementos da mesma espécie. É comum organizar as sucessões verticalmente para depois calcular:

limas	R$
3	144
7	x

2º) Valendo-se do seguinte raciocínio: "se três limas custam R$ 144,00, aumentando as limas, aumentarão os reais, logo, a regra é simples.

3º) A proporção correspondente será:

$$\frac{3}{7} = \frac{144}{x}$$

4º) De acordo com a propriedade fundamental das proporções, tem-se:

$$3 \cdot x = 144 \cdot 7$$

5º) Resolvendo a equação formada, tem-se:

$$x = \frac{144^{48} . 7}{\cancel{3}^{1}}$$

$$x = 336$$

RESPOSTA: O preço das limas será R$ 336,00

a) Um automóvel, em velocidade constante de 80 Km/h, percorre uma certa distância em 6 horas. Em quantas horas fará o mesmo percurso se diminuir a velocidade para 60 Km/h?

SOLUÇÃO: As grandezas são inversamente proporcionais, pois, diminuindo a velocidade, aumentará o tempo de percurso. Daí escreve-se:

$$\begin{array}{c|ll|c} \downarrow & 80km/h & 6h & \uparrow \\ & 60km/h & x & \end{array}$$

- Logo, a proporção correspondente será:

$$\frac{80}{60} = \frac{1}{\frac{6}{x}} \quad \text{ou} \quad \frac{80}{60} = \frac{x}{6}$$

- Pela propriedade fundamental das proporções, tem-se:

60 . x = 6 . 80

$$x = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{80}}{\cancel{60}^{1}} = 8$$

- Resolvendo-se a equação formada:

x = 8

RESPOSTA: O automóvel fará o percurso em 8 horas.

Vimos que a sucessão que contém (x) serve de base para saber se qualquer uma outra é direta ou inversa. Se é direta, recebe as setas no mesmo sentido e se inversa, em sentidos opostos.

Regra de Três Composta

Uma regra de três é composta, quando envolve três ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Para se resolver uma regra de três composta, seguem-se os seguintes passos:

- escrever, numa mesma linha, as grandezas de espécies diferentes que se correspondem;
- escrever, numa mesma coluna, as grandezas de mesma espécie;
- determinar quais são as grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, considerando-se separadamente, duas a duas, as colunas das grandezas envolvidas, uma das quais deve ser, sempre a coluna que contém a incógnita;
- formar a proporção correspondente;
- resolver a equação formada.

Observação: Ao formar a proporção, deve-se considerar o inverso da razão correspondente às grandezas inversamente proporcionais.

Exemplo:

a) Quatro operários, em 6 dias, montam 48 bicicletas. Quantas bicicletas do mesmo tipo são montadas por 10 operários em 9 dias?

SOLUÇÃO: escrevendo-se as linhas e as colunas:

OPERÁRIOS	DIAS	BICICLETAS
4	6	48
10	9	x

- Comparando cada grandeza com a que tem o termo desconhecido:
  - As grandezas "operários" e "bicicletas" são diretamente proporcionais (aumentando uma, aumentará a outra), logo, as setas devem ter o mesmo sentido, ou seja:

OPERÁRIOS	DIAS	BICICLETAS
↓ 4	6	↓ 48
10	9	x

  - As grandezas "dias" e "bicicletas" são diretamente proporcionais, logo, as setas devem ter o mesmo sentido, ou seja:

OPERÁRIOS	DIAS	BICICLETAS
↓ 4	↓ 6	↓ 48
10	9	x

- As razões correspondentes a essas grandezas são:

$$\frac{4}{10} \qquad \frac{6}{9} \qquad \frac{48}{x}$$

- Uma vez que as grandezas envolvidas são todas diretamente proporcionais, tem-se que:

$48/x$ é proporcional a $6/9$ e, ao mesmo tempo, é proporcional a $4/10$, logo, será proporcional ao produto $\frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10}$.

- Portanto, para escrever a proporção correspondente, deve-se igualar a razão que tem o termo desconhecido, com o produto das razões relativas às outras grandezas. Escreve-se:

$$\frac{48}{x} = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} \qquad \text{ou} \qquad \frac{48}{x} = \frac{24}{90}$$

- Pela propriedade fundamental das proporções, tem-se:

$$24 \,.\, x = 48 \,.\, 90$$

$$x = \frac{\cancel{48}^{2} \cdot 90}{\cancel{24}^{1}}$$

- Resolvendo-se essa equação, vem:

$$x = 180$$

- RESPOSTA: serão montadas 180 bicicletas.

b) Se 8 operários constróem, em 6 dias, um muro com 40 m de comprimento, quantos operários serão necessários para construir um outro muro com 70 m, trabalhando 14 dias?

SOLUÇÃO: Escrevendo-se as linhas e as colunas:

OPERÁRIOS	DIAS	BICICLETAS
8	6	40
x	14	70

- Comparando-se cada grandeza com a que tem o termo desconhecido:
  - As grandezas "operários" e "metros" são diretamente proporcionais (aumentando uma, aumentará a outra), logo, as setas devem ter o mesmo sentido, ou seja:

OPERÁRIOS	DIAS	BICICLETAS
$\downarrow$ 8	6	$\downarrow$ 40
x	14	70

  - As grandezas "operários" e "dias" são inversamente proporcionais (aumentando uma, diminuirá a outra), logo, as setas devem ter sentido contrário, ou seja:

OPERÁRIOS	DIAS	BICICLETAS
$\downarrow$ 8	$\uparrow$ 6	$\downarrow$ 40
x	14	70

- As razões relativas a essas grandezas são:

$$\frac{8}{x} \qquad \frac{6}{14} \qquad \frac{40}{70}$$

- Para escrever a proporção correspondente, deve-se igualar a razão da grandeza desconhecida no produto do inverso das razões relativas às grandezas inversamente proporcionais:

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{\frac{6}{14}} \cdot \frac{40}{70} \quad \text{ou} \quad \frac{8}{x} = \frac{14}{6} \cdot \frac{40}{70} \quad \text{ou}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{560}{420}$$

- Pela propriedade fundamental das proporções:

560 . x = 8 . 420

$$x = \frac{\cancel{8}^{1} \cdot 42\cancel{0}}{\cancel{560}^{7}}$$

$$x = 6$$

- RESPOSTA: Serão necessários 6 operários.

Exercícios - Regra de Três

1) Um automóvel percorreu em 5 h uma estrada de 325 Km. Na mesma velocidade, quantas horas precisará para percorrer 520 Km?

2) Um volante gira dando 180 rotações em 30 segundos. Em quantos segundos dará 120 rotações?

3) 18 máquinas produzem 2.400 peças se trabalharem 8 horas. Quantas horas deverão trabalhar 36 máquinas iguais às primeiras para produzirem 7.200 peças?

4) Dispondo de uma engrenagem de 60 mm de diâmetro com 30 dentes, determinar o diâmetro que deve ter outra engrenagem com 12 dentes, a fim de utiliza-la numa transmissão.

5) Uma polia de 20 mm de diâmetro tem de circunferência 62,8 mm. Qual é a circunferência de outra com 50 mm de diâmetro?

6) Uma bomba eleva 180 litros de água em 6 minutos. Quantos litros elevará em 1 hora e 15 minutos?

7) Um automóvel gasta 6 litros de gasolina para percorrer 65 Km. Quantos litros gastará num percurso de 910 Km?

8) Nove pedreiros constróem uma casa em 8 dias, trabalhando 5 horas por dia. Em quantos dias 12 pedreiros, trabalhando 6 horas por dia, poderiam construir a mesma casa?

Porcentagem

Você já deve, muitas vezes, ter ouvido falar na expressão *"por cento"*.

Por exemplo:

- O preço da gasolina aumentou trinta por cento.
- Esta roupa tem vinte por cento de desconto.
- Quinze por cento dos alunos não compareceram à escola hoje.

Para a expressão *"por cento"* usamos o símbolo %.

"Por cento" quer dizer uma determinada quantidade em cada cem.

Se, por exemplo, numa avaliação de matemática de 100 questões, Paulo acertou 70, isto quer dizer que ele acertou 70% das questões dadas, isto é, acertou 70 em 100.

Você percebeu que:

O *"cento"* é uma maneira diferente de dizer *"centésimos"*:

$$70 \text{ em } 100 = \frac{70}{100} = 0{,}70 = 70\%$$

Há diversos modos de calcular porcentagem. Vejamos alguns:

Calcular 30% de R$ 800,00.

1) $30\% = \dfrac{30}{100}$

$$\frac{30}{100} \text{ de } 800 = \frac{30}{100} \times \frac{800}{1} = \frac{24.000}{100} = 240$$

Resposta: R$ 240,00

2) 800 x 30 = 24.000

24.000 ÷ 100 = 240

Resposta: R$ 240,00

Exercícios - Porcentagem

1) Observe a forma fracionária dada e represente-a sob a forma de porcentagem:

a) $\dfrac{2}{100} =$

b) $\dfrac{100}{100} =$

c) $\dfrac{49}{100} =$

2) Represente a porcentagem dada sob a forma de fração:

a) 99% =

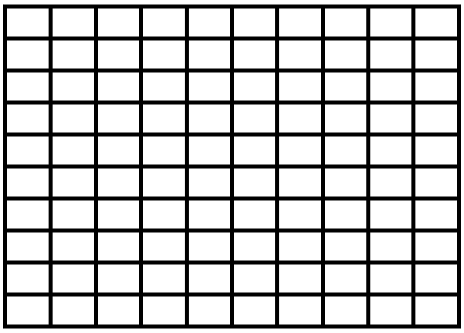
b) 42% =

c) 50% =

3) Calcule:

a) 20% de 800 =
b) 10% de 350 =
c) 18% de 1.400 =

4) Observe o quadro abaixo dividido em 100 partes iguais e marque 38%:



AGORA RESPONDA:

a) Quantos quadradinhos você marcou? ....
b) Quantos sobraram? ....
c) Qual a porcentagem que sobrou? ....

5) Num colégio, 40% dos alunos são meninos. Qual é a porcentagem de meninas?

6) Uma cidade tem 987.500 habitantes, 36% são crianças com menos de 12 anos de idade. Quantas crianças com menos de 12 anos tem a cidade ?